

IDENTIFIKASI KESALAHAN MAHASISWA DALAM PENYELESAIAN SOAL-SOAL LIMIT

¹Budi Mulyono, ¹Hapizah

¹Univeristas Sriwijaya, Jln. Raya Palembang-Prabumulih KM 32 Inderalaya Ogan Ilir
e-mail: budimulyono.unsri@gmail.com

Abstract — *Limit is a main topic of calculus studied especially by students of mathematics education. Despite the fact that limit has been introduced and taught to students at the level of senior high school, there are many student's mistakes occurred in student's answers of limit questions. These findings came from results of survey of 73 students of mathematics education by giving them some questions of limit. The student's mistakes of solving of limit questions that the researchers identify are that students consider limit questions could be solved if there is a kind of variables (for instance, variable x) in a function which its limit will be determined; that students consider the value of limit $f(x)$ as $x \rightarrow c$ is the result of substituting of variable $x = c$ directly into the function $f(x)$; that students are not aware of left-sided limit and right-sided when determining the value of limit of a function, and that students do not use appropriately all information in form of graphic of a function to determine the value of limit of the function.*

Keywords — *identification of student's mistakes in solving questions of limit*

PENDAHULUAN

Kalkulus merupakan salah satu matakuliah wajib bagi mahasiswa program studi pendidikan matematika. Salah satu topik utama yang dikaji dalam kalkulus adalah limit. Menurut Tall (1992) dalam belajar kalkulus, mahasiswa untuk pertama kalinya akan dihadapkan dengan konsep limit yang melibatkan kalkulasi yang tidak lagi dikerjakan dengan hitungan dan aljabar sederhana.

Menurut Tall (1992) para pengajar terkadang mencoba mengatasi permasalahan tersebut dengan menggunakan suatu pendekatan informal yang lebih bermain pada hal-hal bersifat teknik. Namun, apapun metode yang digunakan oleh pengajar, ketidakpuasan secara umum terhadap matakuliah kalkulus muncul di berbagai negara seluruh dunia pada beberapa dedake terakhir (Tall, 1992).

Menurut Kumsa *et al* (2017), baik pada tingkat lanjutan pertama ataupun tingkat universitas, telah diketahui secara internasional bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan memahami dan mengaplikasikan kalkulus, dan kesulitan utamanya terletak pada konsep limit. Hal tersebut selaras dengan temuan Blaisdell (2012) bahwa mahasiswa yang mengambil matakuliah kalkulus mengalami kesulitan mengenai limit, dengan fakta bahwa hanya 21,6% dari 111 mahasiswa yang dapat mengidentifikasi definisi formal limit dengan tepat dari beberapa pilihan definisi yang diberikan.

Menurut peneliti hal ini merupakan permasalahan yang sangat krusial karena pemahaman konsep limit merupakan dasar untuk pemahaman konsep-konsep serta definisi-definisi lanjutan pada Kalkulus II serta Kalkulus Lanjut. Sebagaimana menurut Purcell *et al* (2006) bahwa "*calculus is the study of limits*" yang bermakna bahwa limit merupakan kajian utama dalam kalkulus dan konsep limit merupakan sentral untuk semua

permasalahan dalam fisika, teknologi, dan ilmu pengetahuan sosial.

Begitu juga menurut Liang (2016) bahwa bila mahasiswa jurusan matematika tidak memahami konsep limit maka mereka tidak akan dapat memahami konsep kontinuitas, kontinuitas seragam, kekonvergenan, turunan, dan mereka tidak akan siap mengambil matakuliah-matakuliah analisis lainnya.

Sebagaimana diketahui khususnya di Indonesia bahwa materi limit telah dikenalkan dan diajarkan sejak tingkat sekolah menengah atas. Namun pada kenyataannya mahasiswa masih mengalami permasalahan dalam mempelajari dan memahami limit. Hal tersebut dapat dilihat dari banyaknya mahasiswa memberikan jawaban yang salah dalam menyelesaikan soal-soal limit (Mulyono & Hapizah, 2017). Kesalahan-kesalahan tersebut kemungkinan timbul dari kurangnya pemahaman mahasiswa terhadap materi limit dan juga materi prasyaratnya.

Menurut Muzangwa dan Chifamba (2012) miskonsepsi-miskonsepsi pada pembelajaran kalkulus merupakan suatu hasil dari pemahaman yang kurang terhadap materi-materi dasar kalkulus, seperti limit-limit dari fungsi-fungsi serta representasinya. Menurut Mulyono dan Hapizah (2017) kesalahan-kesalahan dalam penyelesaian soal-soal matematika khususnya materi limit tidak terlepas dari miskonsepsi yang dimiliki oleh mahasiswa.

Menurut Amatangelo (2013) seorang mahasiswa sesungguhnya mempunyai suatu miskonsepsi jika mahasiswa tersebut menggunakan konsep tersebut dalam suatu situasi yang menghasilkan suatu kesalahan. Mahasiswa yang memiliki miskonsepsi tersebut akan tetap meyakini pemahamannya tersebut selama tidak adanya

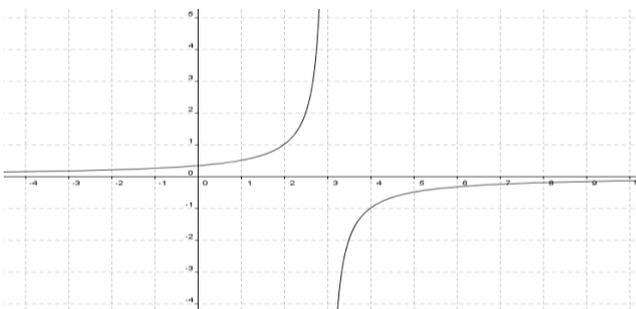
upaya perbaikan ke arah konsep yang benar. Oleh karena itu sebelum upaya memperbaiki miskonsepsi tentang limit yang dimiliki mahasiswa sebaiknya identifikasi kesalahan-kesalahan yang umum dilakukan mahasiswa dalam penyelesaian soal-soal limit.

Hal tersebut mendorong peneliti untuk mencoba mengidentifikasi kesalahan-kesalahan apa saja yang umumnya dilakukan mahasiswa dalam penyelesaian soal-soal limit. Adapun tujuan dari identifikasi kesalahan-kesalahan tersebut adalah untuk dijadikan bahan pertimbangan untuk desain pembelajaran yang lebih tepat dan sesuai untuk mahasiswa dalam pembelajaran materi limit kedepannya.

METODOLOGI PENELITIAN

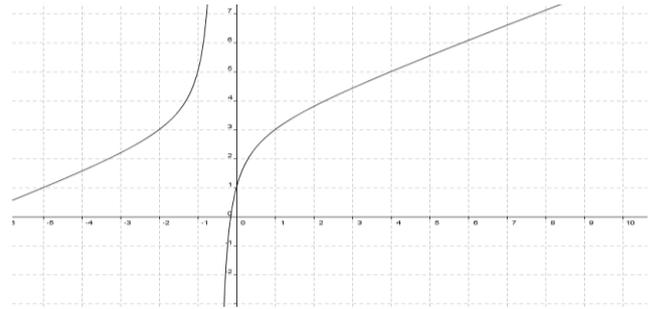
Metode yang digunakan untuk mengidentifikasi kesalahan mahasiswa dalam penyelesaian soal-soal limit adalah survey 73 mahasiswa pendidikan matematika di salah satu perguruan tinggi di Sumatera Selatan. Adapun survey yang dilaksanakan dengan memberikan soal-soal dasar tentang limit untuk mengidentifikasi kesalahan-kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal limit. Soal-soal yang digunakan dalam survey tersebut sebagai berikut:

1. Tuliskan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$.
2. Tuliskan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} 3$.
3. Apakah $\lim_{x \rightarrow 1} 3x = \lim_{x \rightarrow 1} 3$? Berikan penjelasan anda.
4. Tuliskan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$.
5. Tuliskan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$.
6. Apakah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x}$? Berikan penjelasan anda.
7. Tuliskan nilai limit dari $f(x) = \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 4}$ pada saat $x \rightarrow 1$.
8. Perhatikan gambar grafik fungsi $y = f(x)$ berikut ini:



Tuliskan nilai limit fungsi $y = f(x)$ tersebut pada saat $x \rightarrow 3$. Berikan penjelasan anda.

9. Perhatikan gambar grafik fungsi $y = g(x)$ berikut ini:

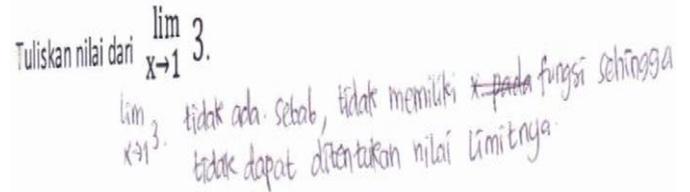


Tuliskan nilai limit fungsi $y = g(x)$ tersebut pada saat $x \rightarrow 1$. Berikan penjelasan anda.

HASIL DAN PEMBAHASAN

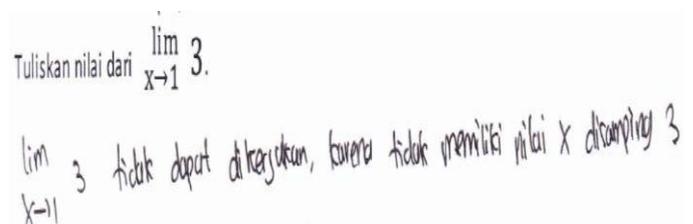
Khusus untuk soal yang menentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$, semua mahasiswa tidak mengalami kesulitan dan memberikan jawaban yang benar. Semua mahasiswa menggunakan cara substitusi langsung $x = 1$ ke fungsi $f(x) = 3x$ dimana jawaban mahasiswa seragam berbentuk seperti berikut ini: $\lim_{x \rightarrow 1} 3x = 3(1) = 3$.

Berikut ini beberapa cuplikan-cuplikan jawaban mahasiswa yang mengandung kesalahan mendasar dalam penyelesaian soal-soal limit.



Gambar A

Jawaban mahasiswa pada Gambar A menyatakan bahwa tidak ada fungsi pada soal $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ sehingga nilai limitnya tidak dapat ditentukan. Kesalahan mahasiswa dalam hal ini adalah menganggap bentuk fungsi konstan $f(x) = 3$ yang tidak mengandung variabel x didalamnya dinyatakan bukan sebuah fungsi dan tidak dapat ditentukan nilai limitnya. Menurut peneliti kesalahan yang dilakukan mahasiswa tersebut disebabkan kurang pemahannya mahasiswa terhadap bentuk fungsi konstan serta terbiasanya menyelesaikan soal $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ dengan langsung memasukkan nilai $x = c$ ke fungsi $f(x)$.



Gambar B

Sedangkan jawaban mahasiswa pada Gambar B menyatakan bahwa tidak ada nilai limitnya karena tidak ada variabel x pada fungsi di soal limit. Hal ini memperlihatkan bahwa mahasiswa tersebut tidak memahami dengan baik pengertian tentang fungsi, khususnya fungsi konstan dalam kasus ini. Sehingga mahasiswa tersebut menganggap fungsi yang didalamnya tidak mengandung variabel x dinyatakan tidak memiliki nilai limit.

Apakah $\lim_{x \rightarrow 1} 3x = \lim_{x \rightarrow 1} 3$? Berikan penjelasan anda.

Berbeda. Karena pada $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ memiliki nilai x yang disubstitusikan untuk mendapatkan nilai limit, dengan artian bahwa $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ dengan $3x$ adalah $f(x)$ sedangkan pada $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ bukanlah fungsi. $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ adalah fungsi yang dimitasi sedangkan $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ bukan fungsi yang dimitasi.

Gambar C

Jawaban mahasiswa pada Gambar C menyatakan bahwa nilai $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ berbeda dengan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ dengan alasan bahwa bentuk $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ memiliki fungsi $f(x) = 3x$ yang mana variabel x dapat disubstitusikan dengan suatu nilai untuk mendapatkan nilai limit fungsinya, sedangkan bentuk $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ dinyatakan tidak mengandung suatu fungsi sehingga nilai limitnya tidak dapat ditentukan. Dari jawaban tersebut terlihat bahwa mahasiswa tersebut melakukan kesalahan yang mendasar yaitu menganggap bahwa nilai limit adalah hasil substitusi nilai variabel x ke fungsi $f(x)$, sehingga bentuk fungsi konstan yang tidak mengandung bentuk x nya tidak dapat ditentukan nilai limitnya.

Apakah $\lim_{x \rightarrow 1} 3x = \lim_{x \rightarrow 1} 3$? Berikan penjelasan anda.

Tidak, karena pada $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ memiliki variabel x yang apabila disubstitusikan kan nilai x akan menghasilkan $3(1) = 3$ Sedangkan pada $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ tidak memiliki variabel x , hanya nilai konstanta. $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ adalah 0.

$\lim_{x \rightarrow 1} 3x = \lim_{x \rightarrow 1} 3$
 $3(1) = 0$
 $3 = 0$ (Tidak sama)

Gambar D

Jawaban mahasiswa pada Gambar D menyatakan bahwa nilai $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ tidak sama dengan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ dengan alasan bahwa bentuk $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$

memiliki variabel x sehingga bila $x = 1$ disubstitusikan ke bentuk $3x$ didapat nilai limitnya yaitu $3(1) = 3$, sedangkan bentuk $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ tidak memiliki variabel x dan hanya mengandung nilai konstanta sehingga nilai $\lim_{x \rightarrow 1} 3$ adalah 0. Jawaban mahasiswa tersebut menunjukkan kesalahan mendasar yaitu suatu fungsi dapat ditentukan nilai limitnya bila ada variabel x -nya dengan cara substitusi, dan bila berupa fungsi konstan maka nilai limitnya adalah 0.

Tuliskan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Gambar E

Jawaban mahasiswa pada Gambar E menyatakan bahwa $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-1)} = \frac{1}{0} = \infty$. Kesalahan yang terlihat di jawaban tersebut adalah mahasiswa tersebut menentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = \infty$ dengan langsung mensubstitusikan $x = 1$ ke bentuk fungsi $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tanpa mempertimbangkan limit kiri dan limit kanan fungsi tersebut saat $x \rightarrow 1$.

Tuliskan nilai dari $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{|1-1|} = \frac{1}{|0|} = \frac{1}{0} = \text{tidak terdefinisi.}$$

Gambar F

Jawaban mahasiswa pada Gambar F menyatakan bahwa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|1-1|} = \frac{1}{|0|} = \frac{1}{0} = \text{tak terdefinisi.}$$

Kesalahan yang terlihat di jawaban tersebut adalah mahasiswa tersebut menganggap bahwa nilai dari hasil mensubstitusikan $x = 1$ ke bentuk fungsi $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$ merupakan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|}$.

Apakah $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|}$? Berikan penjelasan anda.

Ya, karena, pada saat $x \rightarrow 1$ maka nilai $(x-1) = 1-1 = 0$ dan, pada saat $x \rightarrow 1$ maka nilai $|x-1| = |1-1| = |0| = 0$ sehingga dengan pembilang yang sama yaitu 1 dan dibagi dengan 0 sebagai penyebutnya akan bernilai tak terdefinisi.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|}$$

Gambar G

Jawaban mahasiswa pada Gambar G menyatakan bahwa nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)}$ sama dengan nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|}$ dengan alasan bahwa hasil substitusi $x = 1$

ke bentuk $(x - 1)$ dan juga bentuk $|x - 1|$ sama-sama bernilai 0 sehingga kedua limit tersebut menghasilkan bentuk $\frac{1}{0}$ yang dinyatakan sebagai bentuk yang tak terdefinisi. Kesalahan mahasiswa tersebut dalam hal ini adalah menganggap hasil substitusi variabel $x = c$ ke fungsi $f(x)$ merupakan nilai limit fungsi tersebut pada saat $x \rightarrow c$.

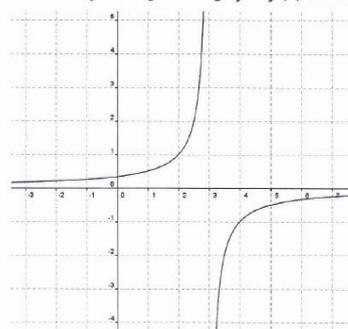
Tuliskan nilai limit dari $f(x) = \frac{x^3+6x^2-6x-1}{2x^2-x-1}$ pada saat $x \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+6x^2-6x-1}{2x^2-x-1} &= \frac{(1)^3+6(1)^2-6(1)-1}{2(1)^2-(1)-1} \\ &= \frac{1+6-6-1}{2-1-1} \\ &= \frac{0}{0} \end{aligned}$$

Gambar H

Jawaban mahasiswa pada Gambar H menyatakan bahwa nilai limit dari fungsi $f(x) = \frac{x^3+6x^2-6x-1}{2x^2-x-1}$ pada saat $x \rightarrow 1$ adalah $\frac{0}{0}$ yang merupakan hasil substitusi $x = 1$ ke fungsi $f(x)$ tersebut. Kesalahan mahasiswa tersebut dalam hal ini adalah menganggap hasil substitusi variabel $x = c$ ke fungsi $f(x)$ merupakan nilai limit fungsi tersebut pada saat $x \rightarrow c$.

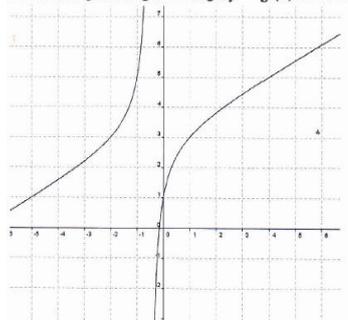
Perhatikan gambar grafik fungsi $y = f(x)$ berikut ini:



Tuliskan nilai limit fungsi $y = f(x)$ tersebut pada saat $x \rightarrow 3$.
Berikan penjelasan anda.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= f(3) \\ &= 2,9999 \text{ atau } 3,0000001 \\ &\text{atau } 3 \end{aligned}$$

Perhatikan gambar grafik fungsi $y = g(x)$ berikut ini:



Tuliskan nilai limit fungsi $y = g(x)$ tersebut pada saat $x \rightarrow 1$.
Berikan penjelasan anda.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= g(1) \\ &= 0,99999 \text{ atau } 1,000001 \end{aligned}$$

Gambar I

Jawaban mahasiswa pada Gambar I menyatakan $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2,9999$ atau $3,00000001$ dan $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 0,99999$ atau $1,000001$. Kesalahan mahasiswa dalam hal ini

adalah tidak memperhatikan informasi dari gambar di mana $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ dan $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$, sedangkan $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 3$ dan $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 3$. Hal ini mempertegas bahwa mahasiswa selalu cenderung menggunakan cara substitusi $x = c$ ke fungsi $f(x)$ dalam menentukan nilai dari $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ tanpa memperhatikan limit kiri dan limit kanannya.

KESIMPULAN

Secara umum kesalahan-kesalahan mendasar mahasiswa dalam penyelesaian soal-soal limit antara lain:

- (1) mahasiswa menganggap bahwa pada soal limit dapat diselesaikan bilamana terdapat variabel (misalnya variabel x) pada fungsi yang akan ditentukan nilai limitnya,
- (2) mahasiswa menganggap nilai limit $f(x)$ pada saat $x \rightarrow c$ adalah hasil substitusi langsung nilai variabel $x = c$ ke fungsi $f(x)$,
- (3) mahasiswa tidak memperhatikan limit kiri dan limit kanan dalam menentukan limit suatu fungsi, dan
- (4) mahasiswa tidak menggunakan dengan baik informasi yang diberikan dalam bentuk grafik fungsi dalam menentukan nilai limit suatu fungsi

DAFTAR PUSTAKA

1. Amatangelo, M.L. (2013). Student Understanding of Limit and Continuity at a Point: A Look into Four Potentially Problematic Conceptions. *A thesis submitted to the faculty of Brigham Young University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Arts. Department of Mathematics Education Brigham Young University.*
2. Blaisdell, R. (2012). Student Understanding in The Concept of Limit in Calculus: How Student Responses Vary Depending on Question Format and Type of Representation. *Proceedings Of The 15th Annual Conference On Research In Undergraduate Mathematics Education.*
3. Kumsa, A., Pettersson, K., & Andrews, P. (2017). Obstacles to students' understanding of the limit concept. *10th Congress of European Research in Mathematics Education. cerme10.org.*
4. Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2(1), 35-48.*
5. Mulyono, B., & Hapizah. (2017). Does Conceptual Understanding of Limit Partially Lead Students to Misconceptions? *J. Phys.: Conf. Ser. 895 012061*
6. Muzangwa, J., & Chifamba, P. (2012). Analysis Of Errors And Misconceptions In The Learning Of Calculus By Undergraduate Students. *Acta Didactica Napocensia, Volume 5 Number 2, 2012. ISSN 2065-1430*

7. Purcell, Rigdon, & Varberg. (2006). *Calculus. Pearson 9th Edition. ISBN-10: 0131429248*
8. Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *Proceedings of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus, ICME-7 1992, Québec, Canada, (1993), 13–28. ISBN 2 920916 23 8.*